



В рамках совместного проекта журнала «Наука и инновации» и Института математики НАН Беларуси предлагаем посмотреть глазами ученых-математиков на важнейший аспект экономики – предпочтения потребителей на рынке товаров и услуг – и разобраться, как спрогнозировать уровень продаж с помощью науки.

БЕЗ ФОРМУЛ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В ТЕОРИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ



Валентин Гороховик,
главный научный сотрудник
отдела нелинейного и
стохастического анализа
Института математики НАН
Беларуси, член-корреспондент

Теория потребления – один из важнейших разделов экономической теории. Основными ее объектами являются индивидуальный потребитель (им может быть также условное лицо, представляющее агрегированные интересы коллектива) и множество потребительских благ, элементы которого могут реализоваться в конкретной ситуации как товары (наборы товаров), услуги, инвестиции, развлечения и другие реальные блага, способные удовлетворить потребности потребителя. Цель последнего – выбрать из доступных ему потребительских благ такое, которое наиболее полно по сравнению с другими доступными благами удовлетворяет его потребности.

Основная цель статьи – обсудить основные математические понятия, которые являются базовыми при построении математических моделей теории

потребления. Автор надеется, что среди читателей данной статьи будут не только профессиональные математики, поэтому материал будет излагаться по возможности доступно. Естественно, что, поскольку речь будет идти о математических моделях, совсем избежать математики нельзя. Поэтому автор все же предполагает, что читатель владеет такими основными математическими понятиями, как множество, функция, непрерывность и др.

1. Основной инструмент математического моделирования в теории потребления – бинарные отношения. Исходным в теории потребления является предположение, что потребитель осуществляет выбор наиболее рационального (оптимального) потребительского блага, руководствуясь результатами парных сравнений потребительских благ, при этом для каждой пары потребительских благ A и B потребитель может иметь три взаимоисключающих суждения:

- 1 благо A «лучше» блага B ;
- 2 благо A «хуже» блага B
(благо B «лучше» блага A);
- 3 ни одно из благ A и B не «лучше» и не «хуже» другого.

Результаты парных сравнений разбивают множество всех упорядоченных пар потребительских благ (декартов квадрат множества потребительских благ) на три непересекающиеся подмножества:

- 1 пар (A, B) , в которых благо A «лучше» B ;
- 2 пар (A, B) , в которых A «хуже» B ;
- 3 пар (A, B) , в которых ни благо A , ни благо B не является «лучше» или «хуже» другого.

Заметим, что первое из этих подмножеств (как и второе, но не третье) *асимметрично*: если пара (A, B) принадлежит первому подмножеству, то пара (B, A) ему не принадлежит.

Задав только первое или второе подмножество, мы полностью определяем два оставшихся. Действительно, первое и второе подмножества являются взаимно обратными по отношению друг к другу (упорядоченная пара (A, B) принадлежит второму подмножеству тогда и только тогда, когда пара (A, B) принадлежит первому, и наоборот), а третье подмножество является дополнением к объединению первого и второго. Таким образом, для того чтобы полностью задать результаты парных сравнений потребителя, достаточно указать в множестве упорядоченных пар потребительских благ первое (или второе) из определенных выше подмножеств, или, говоря формальным математическим языком, достаточно задать на множестве потребительских благ асимметричное бинарное отношение, которое содер-

жательно отражает суждение потребителя «блага A «лучше» («хуже») блага B ».

В теории потребления асимметричное бинарное отношение, задающее результаты парных сравнений потребительских благ, принято называть *отношением предпочтения* потребителя (некоторые авторы используют термин «строгое отношение предпочтения»), не влияя на процесс выбора им рационального блага, то в математической модели реальный потребитель фактически отождествляется с соответствующим ему отношением предпочтения, то есть с некоторым асимметричным бинарным отношением.

Во многих конкретных ситуациях для любых потребительских благ A , B и C из того, что благо A «лучше» блага B , а благо B «лучше» блага C , следует, что благо A «лучше» блага C . В этих случаях отношение предпочтения потребителя – не только асимметрично, но и *транзитивно*.

Каждое отношение предпочтения, как асимметричное бинарное отношение, однозначно определяет на множестве потребительских благ такое бинарное отношение, которое является дополнением объединения для него и обратного ему отношения и, следовательно, состоит из таких пар потребительских благ, относительно которых потребитель, руководствуясь своим отношением предпочтения, не имеет суждения, какое из них в паре является лучшим. Отражая содержательную суть, данное бинарное отношение называется в теории потребления *отношением безразличия потребителя*.

Из асимметричности отношения предпочтения следует, что порожаемое им отношение безразличия – *рефлексивное* и *симметричное* бинарное отношение. Рефлексивность означает, что ему принадлежат все пары, составленные из одинаковых (тождественных) благ. Симметричность – что наряду с упорядоченной парой благ (A, B) оно содержит обратную пару (B, A) . Каких-либо других свойств в общем случае отношение безразличия не имеет. В чистой математике рефлексивные и симметричные бинарные отношения принято называть отношениями *толерантности*. Наибольшее распространение получили транзитивные отношения толерантности – *отношения эквивалентности*. Очевидно, что они, как рефлексивные, симметричные и, кроме того, транзитивные бинарные отношения, образуют лишь специальный подкласс в классе отношений толерантности. Тем не менее в математической литературе отношения эквивалентности рассматриваются как основной представитель симметричных

бинарных отношений вообще. Такая точка зрения проникла и в математическую экономику, в том числе в теорию потребления. Этим можно объяснить то, что авторы многих исследований, посвященных теории потребления, априори предполагают, что отношение безразличия, порождаемое отношением предпочтения потребителя, является не только рефлексивным и симметричным, но и транзитивным, то есть отношением эквивалентности. Однако в общем случае отношение безразличия может не быть транзитивным и, следовательно, не быть отношением эквивалентности. Таким образом, предположение о транзитивности отношения безразличия, которое делает большинство авторов при построении теории потребления, является дополнительным требованием, сужающим класс рассматриваемых отношений предпочтения потребителя.

Отношения эквивалентности характеризует *тождественность* элементов, тогда как отношения толерантности – лишь их *сходство*. При этом каждое отношение толерантности порождает принадлежащее ему отношение эквивалентности. В соответствии с ним, два элемента эквивалентны тогда и только тогда, когда множества толерантных им элементов совпадают. Поскольку в принятом в теории потребления контексте асимметричные бинарные отношения интерпретируются как отношения предпочтения потребителя, то порождаемые ими отношения толерантности названы *отношениями безразличия*, а отношения эквивалентности, порождаемые, в свою очередь, отношениями безразличия, – *отношениями равноценности*. Если отношение безразличия транзитивно, то оно совпадает с порождаемым им отношением равноценности. Считается, что два равноценные потребительские блага обладают одинаковой способностью удовлетворить потребности потребителя.

Из всех асимметричных бинарных отношений (класса отношений предпочтения) выделяются три подкласса:

- **отношения *частичного предпочтения*** – произвольные асимметричные и транзитивные бинарные отношения;
- **отношения *слабого предпочтения*** – такие частичные предпочтения, которые порождают транзитивные отношения безразличия;
- **отношения *совершенного предпочтения*** – частичные предпочтения, отношение безразличия которых совпадает с отношением равенства.

Очевидно, что отношения совершенного предпочтения образуют собственный подкласс в классе

отношений слабого предпочтения, а отношения слабого предпочтения – собственный подкласс класса отношений частичного предпочтения.

Данная классификация отношений предпочтения отражает различные способности потребителя сравнивать потребительские блага. Так, отношения совершенного предпочтения характерны для «идеального» потребителя, способного из любой пары различных потребительских благ выбрать лучшее. В этом случае только одинаковые потребительские блага равноценны для него, различные же ранжируются им по способности удовлетворить его потребности.

Потребитель с отношением слабого предпочтения способен для любой пары потребительских благ определить, какое из двух лучше, или заключить, что оба они равноценны для него. Однако он пользуется более мягкими (слабыми) требованиями, в соответствии с которыми равноценными могут быть и различные потребительские блага, а не только одинаковые. Потребитель с отношением слабого предпочтения разбивает множество всех благ на непересекающиеся классы равноценных пар, а затем ранжирует их по способности удовлетворить его потребности.

Наконец, если отношение предпочтения потребителя является лишь отношением частичного предпочтения, то отношение безразличия не совпадает с отношением равноценности, и, следовательно, существуют такие пары различных потребительских благ, которые он не может сравнить по способностям удовлетворить его потребности. Вследствие этого он не ранжирует классы равноценных потребительских благ, а лишь частично упорядочивает.

В существующей экономической литературе (например, [1]) наиболее часто рассматриваются модели, в которых предполагается, что потребитель обладает слабым отношением предпочтения, и, следовательно, соответствующее ему отношение безразличия является отношением эквивалентности. Вместе с тем со стороны экономистов настойчиво высказывается мнение о необходимости более глубокого исследования моделей с отношением частичного предпочтения и, более того, с нетранзитивным отношением предпочтения [2].

Объединение отношения частичного предпочтения и соответствующего ему отношения равноценности является рефлексивным и транзитивным бинарным отношением. Действительно, рефлексивность данного объединения следует из рефлексивности отношения равноценности, а в транзитивности легко убедиться, если воспользоваться следующим наблюдением.

Пусть потребительское благо A «лучше» потребительского блага B , а благо C равноценно благу A . Тогда естественно, что благо C также «лучше» блага B . Аналогично, если в паре A и B вместо блага B рассмотреть равноценное ему благо D , то благо A будет «лучше» блага D . Содержательно объединение отношения частичного предпочтения и соответствующего ему отношения равноценности может быть интерпретировано как отношение «не хуже» на множестве потребительских благ и рассматриваться как нестрогое отношение предпочтения потребителя, порожденное исходным строгим отношением предпочтения.

Рефлексивные и транзитивные бинарные отношения называются отношениями *предпорядка* (или *квазипорядка*), полные отношения предпорядка – отношениями *слабого порядка*, антисимметричные отношения слабого порядка – отношениями *совершенного порядка*. Связь классов отношений предпорядка с отношениями предпочтения следующая: асимметричные части отношений предпорядка являются отношениями частичного предпочтения, слабого порядка – слабого предпочтения, совершенного порядка – отношениями совершенного предпочтения.

Кроме того, отрицание отношения слабого (совершенного) порядка есть отношение слабого (совершенного) предпочтения. И наоборот, отрицание отношения слабого (совершенного) предпочтения есть отношение слабого (совершенного) порядка. В то же время отрицание отношения частичного предпочтения, которое не является отношением слабого предпочтения, может не быть транзитивным и, следовательно, не является, вообще говоря, отношением предпорядка. Некоторые авторы при построении теории потребления рассматривают рефлексивные и транзитивные бинарные отношения как исходные отношения, моделирующие нестрогое отношение предпочтения потребителя.

Как отмечалось выше, идеальной является такая ситуация, когда потребитель представлен отношением совершенного предпочтения – или хотя бы отношением слабого предпочтения. Возникает вопрос: а нельзя ли доопределить (продолжить) заданное отношение частичного предпочтения так, чтобы оно стало отношением слабого предпочтения или даже отношением совершенного предпочтения? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема Шпильрайна [3], доказанная еще в 1930 г.

2. Теория полезности. В конце XIX – начале XX в. среди экономистов господствовало мнение, что каждое потребительское благо обладает объективным свойством полезности, которое, подобно темпе-

ратуре или весу тела, может быть измерено и выражено некоторым числом; при этом чем больше численное значение полезности блага, тем оно (благо) предпочтительнее для потребителя. Присвоив каждому потребительскому благу величину его полезности, определим на множестве таких благ вещественнозначную функцию, которая полностью описывает отношение предпочтения потребителя. Такие функции получили название *функций полезности*.

Нетрудно увидеть, что отношение предпочтения потребителя, которое может быть задано функцией полезности, является отношением слабого предпочтения или, более того, совершенного. Возникает вопрос: а всякое ли отношение слабого предпочтения может быть задано функцией полезности? Как оказалось, ответ на него в случае бесконечного множества потребительских благ отрицателен: так называемое лексикографическое отношение предпочтения, определенное на пространстве R^n , которое интерпретируется как пространство упорядоченных наборов из n товаров, является отношением совершенного предпочтения, однако оно не может быть представлено функцией полезности. Это привело к возникновению в теории потребления раздела, получившего название «теория полезности», в котором исследуются условия существования функций полезности для отношений предпочтения.

В современной теории потребления [4] под функцией полезности отношения частичного предпочтения понимается любая определенная на множестве потребительских благ строго монотонная (в смысле данного отношения предпочтения) вещественнозначная функция, принимающая одинаковые значения на равноценных потребительских благах. Для отношений слабого предпочтения данное определение функции полезности совпадает с классическим определением.

Таким образом, с чисто математической точки зрения теория полезности – это раздел теории потребления, в котором исследуются условия существования строго монотонных в смысле отношения предпочтения потребителя вещественнозначных функций, определенных на множестве потребительских благ. В теории потребления такие функции называются *функциями полезности*. В случае отношения слабого предпочтения соответствующая ему функция полезности, если такая существует, полностью характеризует отношение предпочтения.

Основное содержание теории полезности составляют критерии существования функций полезности для отношений предпочтения.

Для формулировки таких критериев в общем случае можно воспользоваться понятием начального отрезка множества потребительских благ, упорядоченного рассматриваемым отношением частичного предпочтения. *Начальный отрезок* – это такое подмножество множества потребительских благ, которое наряду с каждым принадлежащим ему благом содержит все другие, менее предпочтительные или равноценные ему. Говорят, что семейство начальных отрезков является *порядково плотным* в множестве потребительских благ, если выполняется следующее условие: *для любых двух благ, одно из которых предпочтительнее другого, в данном семействе существует начальный отрезок, содержащий менее предпочтительное благо этой пары и не содержащий более предпочтительное*. Множество потребительских благ называется *порядково сепарабельным*, если в нем существует не более чем счетное порядково плотное семейство начальных отрезков.

Для отношений слабого предпочтения свойство порядковой сепарабельности равносильно существованию не более чем счетного подмножества в множестве потребительских благ, удовлетворяющего следующему условию: для любой пары благ A и B , где A предпочтительнее B , в данном подмножестве существует благо C , которое более предпочтительно или равноценно благу B и менее предпочтительно или равноценно благу A (C как бы разделяет A и B).

Как оказалось, свойство порядковой сепарабельности множества потребительских благ эквивалентно существованию функции полезности для заданного на нем отношения частичного предпочтения. Эта эквивалентность – следствие того, что упорядочение порядково сепарабельного множества потребительских благ отношением частичного предпочтения подобно естественному упорядочению некоторого подмножества множества действительных чисел.

В случае, когда на множестве потребительских благ кроме отношения частичного предпочтения задана топология, естественно возникает вопрос о существовании непрерывных (или хотя бы полунепрерывных) функций полезности. Оказывается, что существование *полунепрерывной* сверху или снизу функции полезности эквивалентно существованию не более чем счетного порядково плотного семейства открытых (замкнутых) начальных отрезков в множестве потребительских благ. Для существования *непрерывной* функции полезности требуется более сильное условие согласования топологии и упорядочения, задаваемого на множестве потребительских благ отношением частичного предпочтения. Во-пер-

вых, требуется, чтобы топология была порядково нормальной [5], а во-вторых, чтобы существовало не более чем счетное семейство начальных отрезков, удовлетворяющее усиленному условию порядковой плотности [6]. Классические критерии существования непрерывных функций полезности для отношений слабого предпочтения, установленные Дебрё [7] и Эйленбергом [8], являются следствиями общего критерия.

3. Функция спроса. Выбор каких потребительских благ из подмножества доступных потребителю рационален (оптимален) для него? Этот вопрос – один из основных в теории потребления.

Будем различать множество *потребительских благ* и множество *доступных потребительских благ*. Второе отличается от первого тем, что включает только те блага, выбор которых, учитывая бюджетные ограничения, цены на рынке и другие обстоятельства, потребитель может позволить себе выбрать и приобрести. Таким образом, множество доступных потребительских благ является подмножеством множества всех потребительских благ, при этом выбор блага потребителем ограничивается соответствующим ему множеством доступных потребительских благ.

В том случае, когда среди доступных благ существует наилучшее благо, то есть такое, которое «не хуже» («лучше» или «равноценно») любого другого из доступных, то его выбор естественно считать рациональным для потребителя. Нетрудно видеть, что наилучшее благо всегда существует, если множество доступных благ конечно, а отношение предпочтения потребителя является отношением слабого предпочтения. Однако, если отношение предпочтения потребителя является только отношением частичного предпочтения, то даже в конечном множестве доступных благ наилучшее благо может не существовать. В этом случае рациональным является выбор неумлучшаемого блага – такого, «лучше» которого среди доступных благ не существует.

Неумлучшаемые блага не являются, вообще говоря, наилучшими. Но если в множестве доступных существует наилучшее благо, то оно является также и неумлучшаемым, более того, в этом случае любое неумлучшаемое благо является и наилучшим. Вместе с тем более типичной для потребителя с отношением частичного предпочтения является ситуация, когда наилучших благ в множестве доступных потребительских благ нет, а неумлучшаемые блага существуют, причем в этом случае различные неумлучшаемые блага не являются, вообще говоря, равноценными.

Вследствие этого, сужая рациональный выбор потребителя до множества неулучшаемых доступных потребительских благ, мы не разрешаем для него окончательно проблему выбора, поскольку не указываем, какое конкретное благо из неравноценных неулучшаемых благ следует выбрать.

Данная неопределенность не является следствием «неудачного» определения рационального выбора, а объективно возникает из-за того, что отношение предпочтения потребителя является лишь отношением частичного (а не слабого) предпочтения и, следовательно, не для любой пары благ потребитель может указать, какое из двух является лучшим, или хотя бы то, что они равноценны. Таким образом, неопределенность, объективно существующая у потребителя при парных сравнениях, не исчезает, а переходит в неопределенность рационального выбора. Преодолеть ее можно, например, продолжив (доопределив) отношение предпочтения потребителя до отношения слабого или даже совершенного предпочтения, что возможно в силу теоремы Шпильрайна. Однако поскольку такое продолжение неоднозначно, то фактически неопределенность выбора неулучшаемого доступного блага подменяется в этом случае неопределенностью выбора продолжения частичного предпочтения до отношения слабого или совершенного предпочтения. Другое дело, если выбор такого продолжения основывается на некоторых объективных дополнительных данных, уточняющих отношение предпочтения потребителя.

Из сказанного выше следует, что каждый потребитель представлен в математической модели не только отношением предпочтения, но и множеством доступных ему потребительских благ, которое он формирует исходя из собственного бюджета, существующей системы цен и других объективных условий, ограничивающих его выбор. Задача потребителя – осуществить рациональный, с его точки зрения, выбор доступного ему потребительского блага. Естественно, что такой выбор должен быть неулучшаемым в множестве доступных потребительских благ. *Именно неулучшаемые доступные блага будут пользоваться спросом потребителя, все другие будут отвергнуты им как нерациональные.*

Соответствие, которое каждой паре, состоящей из отношения предпочтения потребителя и множества доступных потребительских благ, сопоставляет множество неулучшаемых доступных благ, называется функцией спроса. Простейшие свойства функции спроса, ее зависимость от отношения предпочтения и множества доступных потребительских

благ легко устанавливаются непосредственно из ее определения. Например, если отношение предпочтения первого потребителя является продолжением отношения предпочтения второго потребителя, то при одном и том же множестве доступных благ множество неулучшаемых благ первого потребителя содержится в множестве неулучшаемых благ второго потребителя. Другими словами, чем шире отношения предпочтения потребителя, тем точнее он определяет свой рациональный выбор.

Значительное место в исследованиях функции спроса занимает вывод условий, которым должны удовлетворять отношение предпочтения потребителя и множество доступных потребительских благ для того, чтобы множество соответствующих им неулучшаемых доступных благ было не пусто. В общем случае такие условия являются следствиями леммы Куратовского – Цорна и других эквивалентных ей аксиом теории множеств, таких как принцип максимальности Хаусдорфа, аксиома выбора и др. [5]. В частном случае, когда потребитель представлен слабым отношением предпочтения, допускающим функцию полезности, множество неулучшаемых благ (в этом случае оно и множество наилучших) совпадает с множеством доступных благ, максимизирующих функцию полезности. Условия существования точек максимума вещественнозначных функций хорошо изучены в математической теории оптимизации [9, 10]. ■

Более детальное и строгое изложение математических основ теории потребления можно найти в книге автора [11].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Джейли Дж.А., Рене Ф.Дж. Микроэкономика: продвинутый уровень. – М., 2011.
2. Fishburn P.C. Nontransitive Preferences in Decision Theory // Journal of Risk and Uncertainty 1991. Vol. 4. No.2. P.113–134.
3. Szpilrajn E. Sur l'extension de l'ordre partial, Fundamenta Mathematicae. 1930. Vol. 16. P. 386 – 389.
4. Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. – Л., 1980.
5. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М., 1977.
6. Bridges D.S., Mehta G.B. Representations of Preferences Orderings. – Berlin, 1995.
7. Debreu G. Representation of preference ordering by a numerical function // In: Thrall R., Coombs C.C., Davis R. (eds.), Decision Processes. – New York, 1954. P. 159–166.
8. Eilenberg S. Ordered topological spaces // American Journal of Mathematics. 1941. Vol. 63. No. 1. P. 39–45.
9. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М., 2002.
10. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. – Минск, 2007.
11. Гороховик В.В. Математические основы теории потребления. – Минск, 2021.