Как из 100 000 000 000 вариантов выбрать нужный,

если перебрать успеваешь только 100 из них?

Продолжение. Начало в №3

Владимир Сарванов,
ведущий научный сотрудник отдела теории чисел и дискретной математики Института математики, кандидат физико-математических наук

Евгений Макаров,
зав. отделом дифференциальных уравнений Института математики, доктор физико-математических наук, профессор;
jcm@im.bas-net.by

В рамках совместного проекта журнала «Наука и инновации» и Института математики НАН Беларуси представляем продолжение публикации об истории математических открытий и их роли в современных технологиях.

Высаживаем леса, выращиваем деревья и сколачиваем клики

Что эйлеров и гамильтонов циклы, что запрещенные конфигурации планарных и тороидальных графов – все это специфические подграфы исходного графа. Задачи их отыскания – одни из основных в алгоритмической теории графов. Есть и много других, в которых требуется найти имеющий нужные свойства подграф заданного графа или, по крайней мере, доказать его существование. В рамках этих поисков популярно построение остовных деревьев, паросочетаний и клик, часто с какими-либо условиями минимальности или максимальности.

Паросочетание – это множество попарно несмежных, то есть не имеющих общих вершин ребер. Его можно представлять себе как содержащийся в исходном графе лес, состоящий из «иголок» – деревьев на двух вершинах с одним ребром. Паросочетание называется максимальным, если к нему нельзя добавить ни одной дополнительной «иголки», и совершенным, если в него входят все вершины графа. *Клика* – подграф, являющийся полным графом, то есть набор вершин исходного графа, каждая из которых связана ребрами со всеми другими из этого же набора. Остовное дерево может быть только в связном графе. В него по определению должны входить все вершины исходного графа.

Алгоритмы, разработанные математиками для решения такого рода задач, широко используются в самых разнообразных информационных технологиях, от проектирования компьютерных сетей до анализа данных в медицине и биологии. Некоторые из них возникли еще на заре теории графов в первой половине XX в., и с их появлением иногда связаны очень поучительные истории, позволяющие проникнуться атмосферой той, уже почти легендарной эпохи.

Задача построения остовного дерева во взвешенном графе естественным образом возникает при проектировании практически любой сети. Весом ребра в таких случаях, как правило, будет стоимость включения этого ребра в сеть, для линий электропередачи в основном определяемая его физической протяженностью и характером местности. Цель при этом – создание наиболее дешевого скелета сети, который впоследствии можно будет дополнить резервными и дублирующими линиями, прокладка которых, очевидно, приведет к образованию циклов в изображающем сеть графе.

Именно такая задача встала перед компанией «Западно-Моравские электростанции» вскоре после ее образования в 1921 г., когда она приступила к электрификации сельских населенных пунктов Западной и Южной Моравии. Речь шла о том, куда и как вести линии электропередачи, которые должны были соединить несколько десятков деревень в окрестностях Брно, чтобы они имели наименьшую длину и, следовательно, были наиболее экономичными при прокладке. Но найти оптимальный путь с помощью инженерных методик не удавалось, а адекватного математического способа решения таких проблем еще не существовало: до создания полноценной теории графов оставалось около 10 лет, хотя еще в середине XIX в. на начальной стадии развития этой теории была установлена формула для числа всех n-вершинных деревьев, которое равно $n^{(n-2)}$. Ровно столько же имеется и различных остовных деревьев в полном графе на n вершинах, что при количестве узлов электросети в несколько десятков полностью исключало возможность решения задачи, вставшей перед энергетиками, путем

Формула для числа остовных деревьев полного графа на n вершинах была установлена Г. Кирхгофом в 1847 г. при исследовании электрических цепей и А. Кэли в 1889 г. в связи с перечислением деревьев, описывающих строение разветвленных углеводородов, а также Дж. Сильвестром в 1857 г. и К. Борхардом в 1860 г.

Кирхгофом на самом деле была решена более общая задача – он нашел формулу для числа остовных деревьев t(G) любого графа G на n вершинах:

$$t(G) = \frac{1}{n}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ *– ненулевые собственные значения матрицы Кирхгофа K(G), которая связана с матрицей смежности A(G) графа G равенством K(G)= D(G)–A(G), где D(G) – диагональная матрица степеней вершин графа. Каждый ее элемент, стоящий на пересечении i-го столбца и i-й строки, равен степени вершины с номером i. По определению это число совпадает с суммой элементов матрицы смежности, стоящих в этой же строке. Все остальные элементы нулевые.*

Задачи, в которых требуется определить количество графов, обладающих тем или иным свойством, называются перечислительными. Существует целый раздел *теории графов – перечислительная теория графов. Ее развитию в Институте математики уделялось немалое внимание. Сотрудниками института получены эффективные перечислительные формулы для нескольких классов неизоморфных плоских графов (карт) с n ребрами, в том числе эйлеровых, полуэйлеровых и двудольных; установлены перечислительные формулы для плоских графов с выделенным остовом, имеющих заданное число ребер и вершин; найдены замкнутые перечислительные формулы для регулярных плоских карт нечетной степени с заданным числом вершин.*

Отметим, что теория задач перечисления карт на поверхностях восходит к классическим результатам У. Татта 1960-х гг. по перечислению так называемых корневых плоских карт. Несколько позже и независимо этой задачей заинтересовались физики, начиная с нобелевского лауреата Г. Хоофта, в связи с некоторыми моделями статистической физики и квантовой гравитации. К настоящему времени перечислительная теория карт насчитывает сотни публикаций в престижных международных математических журналах.

простого перебора вариантов, поскольку уже при n=10 их число равно 10^8 – 100 миллионов.

В конце 1925 г. сотрудник «Западно-Моравских электростанций» Йиндржих Саксел после длительных и неудачных попыток продвинуться в решении порученной ему задачи обратился за помощью к Отакару Борувке, в будущем – академику и патриарху чехословацкой математики (в послевоенное время он занимался теорией дифференциальных уравнений и на этой почве поддерживал контакты с Институтом математики АН БССР и его директором Н.П. Еругиным), который на тот момент был ассистентом профессора, изучал новую для него область проективной дифференциальной геометрии и никакого опыта в области дискретной математики не имел. И тем не менее не только решил задачу, стоявшую перед Й. Сакселом, но дал ей строгую математическую формулировку:

на плоскости (в пространстве) даны n точек, расстояния между которыми попарно различны. Необходимо их соединить сетью так, чтобы: 1) каждые две точки соединялись либо напрямую, либо через другие; 2) общая длина сети была как можно меньшей, – и создал общий метод решения в виде очень простого алгоритма. Результаты были тут же опубликованы: сначала в специальном техническом журнале для энергетиков [8], а затем и в местном научном издании «Труды Моравского общества естествознания» [9].

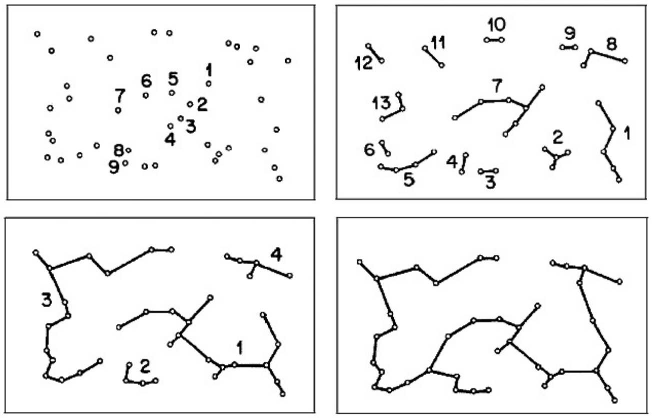

Рис. 1. Возникновение кратчайшего остовного дерева из россыпи точек на карте под действием алгоритма Борувки [8, 10]

Чешские математики тщательно выяснили и заботливо сохранили все обстоятельства этих и последующих событий, закрепивших за Чехией приоритет в решении одной из первых задач теории графов и комбинаторной оптимизации. Как сами работы О. Борувки, так и многочисленные публикации, им посвященные ([10] и др.), оцифрованы и выложены на портале *The Czech Digital Mathematics Library, https://dml.cz,* созданном «для того, чтобы сохранить в цифровом виде содержание основной части математической литературы, которая когда-либо публиковалась на чешских землях, и обеспечить свободный доступ к цифровому контенту и библиографическим данным».

В алгоритме Борувки предполагается, что веса ребер в исходном графе различны или как-то дополнительно упорядочены так, чтобы всегда можно было найти единственное ребро с минимальным весом. Сам автор алгоритма всегда отмечал, что это условие гарантирует единственность решения задачи, но абсолютно несущественно на практике, поскольку два отрезка длиной в несколько десятков километров обязательно отличаются хотя бы на один сантиметр [12].

Работа алгоритма состоит из (1) высаживания леса и (2) выращивания деревьев.

Высаживание леса производится перед началом работы алгоритма. Для этого необходимо удалить в исходном графе все ребра, превратив его в лес из одновершинных деревьев.

Затем на каждом последующем шаге для всякого дерева в имеющемся лесу находим самое короткое ребро, связывающее его с некоторым другим, и соединяем их этим ребром. При этом деревья растут, а их количество уменьшается. Все как в настоящем лесу.

То, что случилось дальше, определялось двумя факторами: особенностями опубликованных работ и тем, что происходило в большом мире, далеком от интересов европейского, но вполне провинциального Брно.

Статья, вышедшая в техническом журнале, представляла собой короткий рассказ и образцовый показ работы нового алгоритма: занимающие половину журнальной страницы несколько строк текста и 4 рисунка *(рис. 1)*, на которых из россыпи 40 точек, изображающих узлы сети, за 4 хода как по волшебству возникает вожделенная оптимальная сеть. Нет никаких сомнений, что это должно было произвести впечатление на «технарей». И тому есть свидетельство. 17 ноября 1939 г. нацисты закрыли все чешские университеты. И «Западно-Моравские электростанции» немедленно обратились к О. Борувке с предложением поступить к ним на работу на очень выгодных условиях. Он подумал… и отказался. (Такие были времена!) На этом его роман с энергетикой и завершился. Вскоре все закончилось и для его контрагента: инженер Йиндржих Саксел был расстрелян гестапо 5 июня 1942 г.

Совсем по-другому развивались события вокруг математической статьи. Как и статья для энергетиков, она вышла на чешском языке (с резюме на немецком, благодаря чему и стала со временем известной). Это, а также ее объем – 22 страницы – и искусственная усложненность изложения, которую признавал и сам автор, казалось бы, обрекали ее на вечное забвение. На удивление, получилось иначе.

Выдающийся американский математик Джозеф Краскал в статье [13], посвященной памяти академика Борувки, рассказывает, что где-то во второй половине 1954 г. ему в руки попали скрепленные вместе две обтрепанные странички бумаги неизвестного происхождения с текстом на немецком языке, отпечатанным на машинке через копирку. До него они длительное время циркулировали по математическому факультету Принстона, не находя себе должного применения. Как выяснилось чуть позже, это была перепечатка немецкого резюме статьи [9].

1954 г. – самый разгар холодной войны. «Горячая» Вторая мировая разогрела интерес к новой математике как средству совершенствования невиданного ранее оружия. Холодная война подняла этот интерес на небывалую высоту. В те годы усилия многих западных математиков были направлены на решение задач наподобие Soviet Railway System Problem, состоявшей в поиске оптимального способа бомбить советские железные дороги, позволяющего полностью блокировать их деятельность при наименьшей затрате ресурсов [14]. Именно эту проблему решает вошедшая во все учебники знаменитая теорема Форда – Фалкерсона и одноименный алгоритм, при изучении которых в практике преподавания западных университетов Soviet Railway System Problem до сих пор используется как важный пример. Над чем тогда работали советские специалисты, до сих пор остается во многом неизвестным.

К этому времени уже несколько математиков вновь открыли или модифицировали алгоритм построения кратчайшего остовного дерева. В 1930 г. профессор Карлова университета в Праге В. Ярник, ознакомившись с работами Борувки, предложил свой способ, переоткрытый в 1957 г. американцем Р. Примом, имя которого он теперь и носит. В 1938 г. Г. Шоке в «Докладах Французской академии наук» опубликовал алгоритм, идентичный варианту Борувки. Еще одно независимое изобретение того же построения было сделано в 1951 г. в Польше группой математиков [15]. Никто из них, по-видимому, не знал о работах предшественников.

«При первом чтении я мало что понял, только общую идею», – пишет Дж. Краскал. Она показалась ему элегантной, но чересчур сложно воплощенной. Следуя своим природным склонностям просто излагать сложные вещи, он «постарался упростить конструкцию до ее сути», надеясь, однако, на то, что идея метода все еще присутствует в новой версии. На самом деле был создан совершенно новый алгоритм.

Дж. Краскал долго сомневался, достоин ли полученный результат публикации, и очень благодарен тому человеку, чье имя он тем не менее прочно забыл, который убедил его отдать работу [16] в печать: «Прошло немало лет, прежде чем другие мои публикации стали столь же известны как эта, казавшаяся слишком простой».

Три классических алгоритма построения минимального остовного дерева во взвешенном графе сейчас носят имена Борувки, Прима и Краскала. Все три начинают свою работу одинаково, с высаживания леса, но каждый из них выращивает деревья по-своему.

Под действием алгоритма Прима растет только одно дерево, к которому на каждом шаге присоединяется самое короткое ребро из всех тех, которые прилегают к его вершинам.

Алгоритм Краскала требует предварительного упорядочения всех ребер по возрастанию длины. Затем в порядке этой очередности каждое ребро рассматривается и либо добавляется в растущий лес, если оно соединяет два разных дерева, либо отбрасывается, если соединяет вершины одного и того же дерева, замыкая в нем цикл.

Следует отметить, что во всех случаях присоединяемое ребро должно быть самым коротким среди некоторого доступного набора ребер исходного графа. Это позволяет отнести все три алгоритма к категории «жадных». Алгоритм считается таковым, если при его работе на каждом этапе выбираются варианты, наилучшие «здесь и сейчас», в надежде, что в конце концов это приведет к нужному решению, наилучшему среди всех. Такая надежда далеко не всегда оправдывается, но для некоторых задач применение жадных алгоритмов вполне оправданно.

После 1956 г. процесс переоткрытия все тех же трех алгоритмов продолжился. Г. Лоберман и А. Вейнберг в 1957 г. в статье [19] описали методы, аналогичные методам Ярника – Прима и Краскала, но их статья вышла слишком поздно, когда работа [16] уже была напечатана, о чем они и пишут в замечании, добавленном при корректуре. Е. Дейкстра в работе 1959 г. [20] подверг критике их, а также и Дж. Краскала, и предложил в качестве нового алгоритм, идентичный алгоритму Ярника – Прима, усовершенствовав при этом способ хранения промежуточных данных, но не заметив, что в [19] он, по сути дела, также описан.

Статья [20] была сдана в журнал «Numerische Mathematik» в 1956 г., но вышла лишь через 3 года при определенном сопротивлении редакции. В это время университетская Европа, в отличие от США, продолжала жить прежними понятиями: «В математической культуре тех дней Вы должны были иметь дело с бесконечностью, чтобы сделать вашу тему с научной точки зрения респектабельной», – жаловался Е. Дейкстра в своем интервью [21].

В этой же статье он опубликовал свой алгоритм отыскания кратчайшего пути в графе, связывающего две заданные вершины. По его всегдашним утверждениям, он придумал его за 20 минут без карандаша и бумаги за столиком кафе. И, как некоторые авторы пионерных результатов алгоритмической теории графов той поры, сомневался в ценности того, что получилось, из-за очевидной простоты. «В конце концов этот алгоритм стал, к моему большому удивлению, одним из краеугольных камней моей славы», – отмечал он спустя почти 50 лет [21].

Наконец, в 1961 г. Г. Соллин подготовил доклад на семинаре К. Бержа в Париже, в котором он еще раз открыл алгоритм Борувки – и на несколько десятилетий алгоритм Борувки стал алгоритмом Соллина.

К середине 1960-х, когда исследования по теории графов и комбинаторной оптимизации начались в Институте математики АН БССР, эпоха уже сменилась. С тех пор уже никому не удавалось за 20 минут «сварганить на коленке» результат мирового уровня, да еще такой, что его можно за те же 20 минут объяснить любому «чайнику».

В самом деле, совершенно непонятно, как это сделать в отношении вот такой последовательности слов: «построено рекурсивное множество формул экзистенциональной логики второго порядка, которое в точности определяет класс сложности $NP \cap coNP$ комбинаторных проблем на произвольных структурах».

А ведь этот результат, недавно полученный в Институте математики, до самого последнего времени характеризовался известными специалистами как абсолютно недостижимый. Сама возможность существования таких формул подвергалась сомнению. Более того, вполне вероятной считалась справедливость гипотезы о невозможности рекурсивного представления всех проблем из этого класса, играющего исключительную роль в криптографии с открытым ключом, поскольку существует прямая зависимость криптографической стойкости такого шифрования от их вычислительной сложности. Теперь эта гипотеза опровергнута, но значение этого события очень трудно донести даже до математиков других специальностей, не говоря уже о «людях с улицы».

Новая эпоха принесла с собой невиданный рост интереса к графовым задачам, в том числе и отысканию специальных подграфов. Остовы сетей и маршруты в них превратились в предмет пристального внимания провайдеров услуг связи, а изучение структуры связей пользователей между собой, в том числе и выявление плотно сколоченных клик, стало чрезвычайно занимать маркетологов и спецслужбы. И это не говоря уже о внимании к теме со стороны военных и военно-промышленного комплекса.

Лица из треугольников, дома из спичек

В наступившую новую эпоху одним из наиболее востребованных разделов дискретной математики стала комбинаторная вычислительная геометрия. Как научное направление она начала активно развиваться со второй половины 70-х гг. Ее возникновение в наибольшей степени стимулировалось потребностями компьютерной графики и автоматизированного проектирования микросхем. Предметом исследований в ней являются геометрические объекты, имеющие конечное (дискретное) описание. Таковы, например, конечные наборы точек и отрезков, многоугольники на плоскости и многогранники в пространстве. Разработка и исследование алгоритмов и структур данных для эффективного оперирования такого рода объектами является центральной задачей комбинаторной вычислительной геометрии. Чтобы дать представление об этих задачах, приведем 4 из них, имеющие совершенно прозрачные постановки:

- *даны n точек на плоскости, найти две из них, расстояние между которыми минимально;*
- *для заданного множества из n точек на плоскости построить его выпуклую оболочку, то есть минимальный выпуклый многоугольник, содержащий все эти точки;*
- *для заданного множества из n отрезков на плоскости найти все пары пересекающихся отрезков;*
- *построить разбиение на треугольники заданного на плоскости многоугольника с n вершинами.*

Предполагается, что в условиях сформулированных задач каждая точка задается своими координатами, отрезок – парой концевых точек, а многоугольник – координатами своих вершин.

Скептически настроенному читателю подобные задачи могут показаться слишком простыми. Впечатление о простоте и даже тривиальности может сложиться из-за того, что при небольшом числе точек (отрезков) их можно изобразить на плоскости и решить соответствующую задачу «визуально». Неприемлемость подобного «решения» связана в первую очередь с тем, что число n точек (отрезков) в реальных задачах чрезвычайно велико. В частности, при проектировании элементной базы современных компьютеров приходится иметь дело с миллионами точек, отрезков и других элементарных геометрических объектов. Такая же особенность характерна и для других прикладных областей. В этой ситуации непригодными оказываются и алгоритмы, основанные на бесхитростном переборе возможных вариантов. Например, для решения первой из указанных задач можно было бы вычислить расстояния между каждой из $n(n-1)/2$ пар точек и выбрать пару с наименьшим расстоянием. Время работы (сложность, трудоемкость) такого алгоритма будет расти пропорционально квадрату числа точек. Заметим, что наилучший на сегодняшний день алгоритм решения рассматриваемой задачи имеет сложность порядка $n \log \log n$, где символ log обозначает логарифм по основанию 2. Разница между n^2 и $n \log \log n$ становится огромной при достаточно большом n. Если, условно говоря, задачу со сравнительно небольшим числом точек $n = 10\,000$ алгоритм трудоемкости, пропорциональной $n \log \log n$, решает за 1 минуту, то для пропорциональной n^2 понадобится около 2 суток. Предполагается, конечно, что в обоих случаях использован один и тот же язык программирования и компьютеры одинакового быстродействия.

Сформулированные выше задачи, вместе с рядом похожих, решались на первой стадии развития комбинаторной вычислительной геометрии. Они были на тот момент базовыми, поскольку необходимость ускорения процесса возникала при разработке алгоритмов решения многих других, более сложных задач.

В приведенных четырех примерах все фигурирующие там объекты рассматриваются на плоскости, то есть соответствующие задачи являются «двумерными». Нетрудно сформулировать их трехмерные аналоги, заменив плоскость пространством, а плоские многоугольники – трехмерными многогранниками. Переход к пространственной постановке, как правило, значительно усложняет задачу. С переходом в пространство более высокой размерности они становятся еще более трудными. На современном этапе развития комбинаторной вычислительной геометрии исследование «двумерных» задач по-прежнему остается актуальным – при том, что доля связанных с многомерными объектами постоянно возрастает.

В Институте математики первые годы развития этого направления были связаны с разработкой алгоритмов решения комбинаторно-геометрических задач именно на плоскости.

Сотрудниками института были предложены методы построения выпуклых оболочек различных объектов (многоугольных фигур, конечных множеств точек и др.) на плоскости, отыскания диаметра и ширины таких объектов, а также вычисления расстояний между ними. Разработанные на этой основе алгоритмы асимптотически оптимальны по времени выполнения и используют минимальный объем компьютерной памяти. Кроме того, получено решение ряда задач оптимального разбиения плоских многоугольных областей на элементарные фигуры, разработаны эффективные алгоритмы распознавания связности таких областей и проверки подобия многоугольников.

Прикладные аспекты результатов этих исследований в первую очередь связаны с проектированием интегральных схем. Еще одну область их практического применения составляют разнообразные задачи раскроя, когда требуется из большого листа вырезать детали (фигуры) заданного вида так, чтобы минимизировать отходы, то есть неиспользованную часть материала, иными словами, разместить на нем как можно больше упомянутых фигур.Кроме того, сама техника «эффективного манипулирования» плоскими многоугольными фигурами широко используется в компьютерной графике *(рис. 2)*.

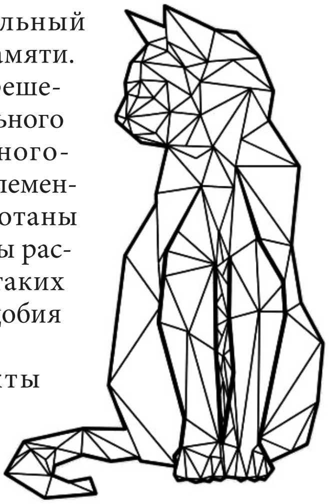

Рис. 2. Кошка из треугольников

Основной объект исследований в трехмерном пространстве – составленные из треугольников многогранные поверхности, которые по-научному называются «двумерные симплициальные комплексы», или «полиэдры». В институте разработан не улучшаемый по трудоемкости алгоритм построения триангулированной (разбитой на треугольники) границы наименьшего тела, составленного из треугольников заданного симплициального комплекса, а также разработан эффективный алгоритм построения всех наименьших тел и удаления всех треугольников, не принадлежащих границам никаких тел в полиэдре.

Описание трехмерного объекта посредством задания триангуляции его поверхности (треугольной сетки – полиэдра) – распространенная форма представления моделей в компьютерной графике. Процесс получения описания некоторого изделия состоит в выполнении ряда операций над полиэдрами (например, операции объединения), задающими его составные части. В результате этого могут появляться «лишние» треугольники (не принадлежащие границам никаких тел в полиэдре). Отсюда возникает задача быстрого обнаружения и удаления таких треугольников. Кроме того, в современных САПР наряду с визуализацией геометрические модели активно используются для различного рода физического моделирования (оптическая трассировка – просчет поведения луча света при преломлении и отражении от моделируемого объекта, тепловое и конвекционное моделирование и т.д.). Для корректного физического моделирования необходима реконструкция топологии геометрической модели, то есть выделение в ней тел и установление связей между ними.

Исследование комбинаторно-геометрических задач в пространствах большей размерности (n>3) было в основном направлено на развитие теории частичной (или обобщенной) выпуклости. Но это настолько обширная и своеобразная тема, что на нее здесь просто не хватит места.

Продолжение следует.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

8. Borůvka O. Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodních sítí // Elektrotechnický obzor. Roč 15. 1926. №10. S. 153–154.
9. Borůvka O. O jistém problému minimálním // Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti v Brně. Sv. 3. 1926. №3. S. 37–58.
10. Milková E. Moderní pohled na «jistý problém minimální» Pokroky matematiky, fyziky a astronomie // Vol. 45. 2000. №4. S. 265–273.
11. Třešňák Z., Šarmanová P., Půža B. Otakar Borůvka. – Brno, 1996.
12. Nešetřil J., Nešetřilová H. The Origins of Minimal Spanning Tree Algorithms – Borůvka and Jarník // Documenta Mathematica. Extra Volume ISMP (2012). S. 127–141.
13. Kruskal J.B. A reminiscence about shortest spanning subtrees // Archivum Mathematicum. Brno, 1997. Vol. 33. №1–2. P. 13–14.
14. T.E. Harris, F.S. Ross. Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities, Research Memorandum RM-1573. The RAND Corporation, Santa Monica, California, [October 24,] 1955.
15. Graham R. L., Hell P. On the History of the Minimum Spanning Tree Problem // Annals of the History of Computing. 1985. Vol. 7. №1. P. 43–57.
16. Kruskal J.B. On the shortest spanning tree of a graph and the travelling salesman problem // Proceedings of the American Mathematical Society. 1956. Vol. 7. P. 48–50.
17. Prim R.C. The shortest connecting network and some generalization // The Bell System Technical Journal. 1957. J. 36. №6. P. 1389–1401.
18. Jarník V. O jistém problému minimálním // Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti v Brně. 1930. Sv. 6. Spis 4. S. 57–63.
19. Loberman H., Weinberger A. Formal Procedures for Connecting Terminals with a Minimum Total Wire Length // Journal of the ACM. 1957. №4. P. 428–437.
20. Dijkstra E.W. A Note on Two Problems in Connexion with Graphs // Numerische Mathematik. 1959. Vol. I. P. 269–271.
21. Prana P.L., Misa T.J. An interview with Edsger W. Dijkstra // Communications of the ACM. 2010. Vol. 53. №8. P. 41–47.