Как из 100 000 000 000 вариантов выбрать нужный,

если перебрать успеваешь только 100 из них?

Inventa mathematicorum («открытия математиков») – совместный проект журнала «Наука и инновации» и Института математики НАН Беларуси, направленный на популяризацию «царицы» точных наук. В его рамках мы представляем цикл научно-популярных статей о современной математике и ее приложениях.

Владимир Сарванов, ведущий научный сотрудник отдела теории чисел и дискретной математики Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук

Евгений Макаров, зав. отделом дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор

В детстве многие любят решать головоломки, например, такие:

Задача 1. *В городе К. берега реки и два острова на ней соединены семью мостами (рис. 1). Можно ли, начав с какого-либо места, пройти через все мосты ровно по одному разу и вернуться к началу пути?*

Задача 2. *В одной сказочной стране в трех домиках жили три соседа. У них были три общих колодца: один с водой, второй с медом, третий с пивом (в прежние времена рассказывать детям о пиве не возбранялось), поэтому они жили богато и весело. Злому волшебнику, как-то пролетавшему над их селом, это не понравилось, и он их поссорил. Соседи сначала перестали разговаривать друг с другом, а потом и вовсе решили никогда больше не встречаться. И для этого они протоптали тропинки от дома каждого соседа к каждому колодцу так, чтобы эти тропинки не пересекались. Могло ли такое быть?*

С возрастом это проходит. Но не у всех. И вот мы можем видеть, как обремененные учеными степенями и званиями седовласые ученые увлеченно занимаются вопросом о том, как победить в игре «Ним». *Есть несколько кучек, в каждой из которых по нескольку камней. Играют двое. Оба игрока по очереди берут камни из кучек. За один ход игрок может взять из какой-нибудь одной кучки любое ненулевое число камней и выбросить их. Выигрывает игрок, взявший последний предмет. Соответственно, проигрыш наступает, когда ходов больше не осталось, то есть все кучки пусты.*

Это можно было бы списать на всем известные чудачества математиков, если бы не одна небольшая, но важная деталь: игра «Ним» сама по себе проста, а вот задача поиска выигрышной стратегии для ее внешне незначительных модификаций (например, для игры «Обобщенная география») обладает такой сложностью и универсальностью, что нахождение (вопреки всеобщим ожиданиям) быстрого способа ее решения приведет, кроме всего прочего, к крушению многих современных криптографических систем, поскольку даст возможность быстрого прочтения сообщений, зашифрованных с их помощью.

Доказательство же невозможности такого быстрого алгоритма даст уверенность в том, что существующая криптография еще долго будет строго хранить военные и государственные тайны, ну и частные секреты тоже.

Однако ни то, ни другое до сих пор сделать никому не удалось.

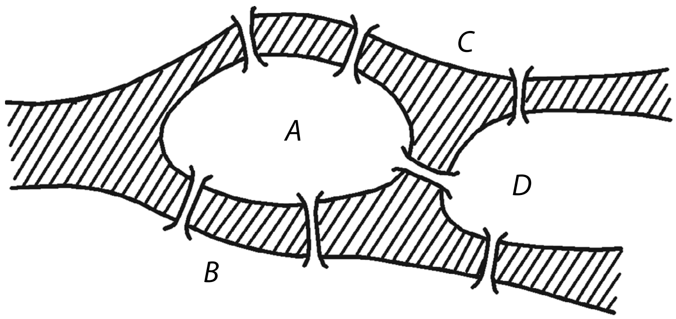

Рис. 1. Мосты города К.

Что же касается задач 1 и 2, то это частные случаи обширного класса задач, в которых требуется найти в заданном графе (математической абстракции реальной системы любой природы, объекты которой обладают парными связями) фрагмент, обладающий требуемыми свойствами. К их решению сводится значительная часть нетривиальных задач, решаемых при создании новых информационных технологий. Стоит ли добавлять, что в случае отыскания удачных ходов в играх, обобщающих игру «Ним», эти задачи будут решаться на много порядков более эффективно?

Эти и многие другие задачи такого рода относятся к дискретной математике – разделу, занимающемуся изучением свойств объектов дискретного характера, то есть не связанных с понятиями предела и непрерывности. Таковы, например, конечные множества точек и соединяющих их линий, функции, заданные на конечных множествах, совокупности многоугольников на плоскости и многогранники в пространстве.

Согласно другой точке зрения, дискретная математика часто отождествляется с конечной математикой – направлением, изучающим разного рода структуры и объекты, состоящие из конечного числа составных частей с конечным числом связей между ними.

В действительности эти точки зрения не противоречат друг другу, поскольку объекты, изучаемые дискретной математикой, одновременно дискретны (что не мешает отрезкам или многоугольникам быть такими объектами) и конечны (что не исключает рассмотрения их бесконечных семейств). Такое сочетание свойств определяет и другие ее особенности. Например, в большинстве задач дискретной математики возможно отыскание решения путем полного перебора вариантов. Но препятствием для этого является их большое число. В этой связи исключительно важную роль играет разработка эффективных (приемлемых с точки зрения вычислительной сложности) алгоритмов. Именно поэтому дискретная математика часто, особенно в учебных целях, рассматривается как совокупность дисциплин, связанных с приложениями к компьютерным наукам.

Возникающие в приложениях дискретные модели почти всегда характеризуются большим числом составляющих элементов, сложной иерархией частей и огромным числом связей между ними, что приводит к необходимости рассматривать комбинаторные структуры чрезвычайно большой размерности. Это делает невозможным построение приемлемых алгоритмов решения связанных с ними задач только на основе «здравого смысла» и приводит к необходимости вести разработку таких алгоритмов на серьезных математических основах. Именно в этом и состоит сущность задач, решаемых дискретной математикой.

Различение непрерывного и дискретного – изначально в человеческом восприятии мира. Осознано оно было далеко не сразу, но уже в античной Греции мы обнаруживаем его как фундаментальное противопоставление числа и меры. Ему соответствовало и разделение всей древнегреческой математики на 2 ветви: непрерывную, представленную тогда геометрией, и дискретную, олицетворявшуюся теорией чисел. Заметим, что ныне в дискретную математику теория чисел никогда не включается: сейчас это совершенно отдельная математическая дисциплина, держащаяся обособленно как от непрерывной, так и от дискретной математики, но активно использующая все пригодные для нее методы и подходы, независимо от их происхождения.

Начиная с XVII в., после появления дифференциального исчисления, в математике безраздельно господствовала ее непрерывная ветвь. На протяжении XVIII и особенно XIX в. возникали и развивались какие-то элементы для будущего огромного здания современной дискретной математики: создавалась теория конечных групп и полей в алгебре, разрабатывалась символическая логика, решались отдельные задачи, позже стимулировавшие возникновение теории графов – но это развитие в какой-то мере имело подчиненный характер. Даже понимание роли дискретного как в определенном смысле скелета для непрерывного, возникшее в работах Анри Пуанкаре по алгебраической топологии, не изменило ситуации принципиально.

Лишь потребности (и возможности) новой техники XX в. с ее широким развитием коммутируемых электрических сетей, разветвленных линий связи, а затем и вычислительных машин заставили сначала инженерную, а затем и научную мысль обратить внимание на дискретные задачи. И старт новой науки стал беспрецедентно бурным. Как, впрочем, и все, что происходило в начальный период научно-технической революции середины XX в. Дискретная математика сегодня – это тысячи специалистов, десятки научных журналов, огромное число публикаций. В нее входят комбинаторика, теория графов, математическая логика, теория алгоритмов, теория кодирования, теория автоматов и многие другие разделы.

В Беларуси исследования дискретных задач были начаты довольно поздно, в 1960-е гг. Их инициатором стал академик Д.А. Супруненко. В это время в экономике республики происходили большие перемены: активно внедрялась автоматизация производственных процессов, создавалась электронная промышленность, в которой происходила смена элементной базы: переход от транзисторов к интегральным схемам, а затем и к большим интегральным схемам, что обусловило реальный запрос на результаты и методы дискретной математики.

Первая выполненная в Институте математики и опубликованная работа по «дискретно-кибернетической» тематике датируется 1962 г., а исследования были начаты годом или двумя раньше. Она касалась построения циклических расписаний в системах обслуживания. Интерес к ней был вызван реальными приложениями к поиску наилучших режимов работы некоторых автоматических линий, в частности, гальванических.

Эти первые достижения привлекли внимание к дискретным оптимизационным задачам, однако настоящей «точкой роста» для формировавшегося направления стали исследования, связанные с поставленной в середине 60-х Д.А. Супруненко задачей минимизации (или максимизации) линейной формы на подмножествах симметрической группы.

В первых работах этого плана были найдены условия, позволяющие быстро (алгоритмически) найти экстремум линейной формы на заданном подмножестве симметрической группы.

В дальнейшем в Институте математики, как и в республике в целом, исследования в области дис-

Симметрическую группу порядка n можно представлять себе как совокупность всевозможных перестановок чисел от 1 до n, а линейную форму на ней – как выражение вида $S=a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+...+a_nb_{i_n}$, где числа $a_1,a_2,...a_n$ и $b_1,b_2,...b_n$ фиксированы, а индексы i_1, i_2,...i_n образуют некоторую перестановку чисел от 1 до n. Если нет ограничений на выбор этой перестановки, сделать значение S наибольшим из возможных нетрудно. Для этого нужно умножать большие a на большие b, а меньшие – на меньшие. Если же ограничения на выбор перестановки индексов есть, все сильно усложняется.

Смысл вопроса о максимизации S легко понять из следующей задачи. Допустим, у вас есть несколько авосек, мешков, банок и бутылок разных размеров, а на складе есть яблоки, семечки, мука, растительное масло и много чего еще. Ваша задача – расфасовать в наличную тару товары наибольшей общей стоимости. Когда всего этого немного, найти максимум просто. Но попробуйте отыскать оптимальное решение, если разнокалиберных мешков и банок сотни, а товаров – десятки тысяч…

кретной математики развивались в трех основных направлениях:

- *теория графов,*
- *комбинаторная оптимизация,*
- *комбинаторная вычислительная геометрия,*

причем для большинства задач первостепенную роль играли алгоритмические аспекты. Все эти направления тесно взаимосвязаны, и имеется немало задач, которые с равным основанием могут быть отнесены к каждому из них. Например, многие задачи комбинаторной вычислительной геометрии и теории графов допускают естественную комбинаторно-оптимизационную постановку, а язык и результаты теории графов широко использую тся в двух других указанных областях. В статье мы попытаемся дать представление о том, что стоит за всеми этими несколько загадочными словами, а также о некоторых дискретных задачах, которые исследовались в Институте математики, и о результатах этих исследований. Их обширные перечни содержатся в [1, 2], а сами результаты рассеяны по многочисленным журнальным статьям нескольких последних десятилетий.

Граф, но не Монте-Кристо

Самый известный публике герой всех дискретно-математических сюжетов – это граф, математический объект, в какой-то степени известный даже людям, чрезвычайно далеким от любой математики. Граф можно представлять себе как картинку из нескольких точек (их часто рисуют довольно «объемными» – для большей заметности) и отрезков линий, соединяющих некоторые пары этих точек. Точки – вершины графа, отрезки – его ребра, причем у каждого ребра вершины лишь на его концах, поскольку предполагается, что оно всегда соединяет лишь две точки. С теорией графов можно познакомиться, например, по учебнику [3] или, в более занимательном формате, по сборнику задач [4].

Обычно считается, что граф не содержит петель, то есть ребер, примыкающих лишь к одной вершине, и кратных ребер, то есть нескольких линий, соединяющих одну и ту же пару точек. Впрочем, при необходимости эти ограничения могут и не вводиться. В этом случае граф без петель называют простым графом, с петлями – псевдографом, кратными ребрами – мультиграфом.

С помощью графов формулируется множество прикладных задач, связанных с объектами дискретной природы. Наиболее естественно и без больших усилий теоретико-графовые модели строятся там, где сам моделируемый объект, по существу, уже является графом. Таковы, например, разного рода сети или схемы. Например, транспортные сети, телекоммуникационные сети (Интернет, мобильная связь), электрические схемы и блок-схемы компьютерных программ. При проектировании и анализе такого рода объектов возникают задачи отыскания специального вида фрагментов (подграфов) в графах, выявления в последних «узких мест» и сильно связанных частей, построения оптимальных по различным критериям размещений (на прямой, на плоскости, в пространстве) и разбиений, перечисления графов с заданными свойствами.

На графы могут «навешиваться» разного рода дополнительные элементы. Например, на ребрах

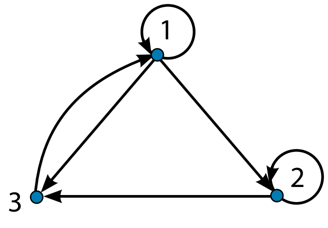

Рис. 2. Ориентированный псевдограф

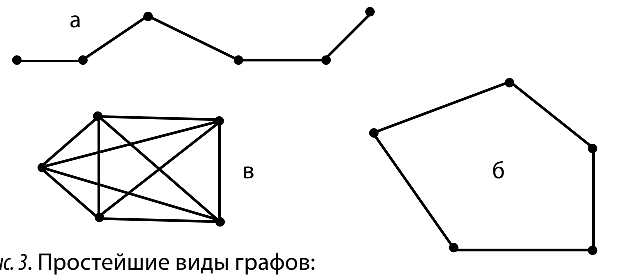

Рис. 3. Простейшие виды графов:
а) простая цепь P_6; б) простой цикл C_5;
в) полный граф на пяти вершинах K_5.

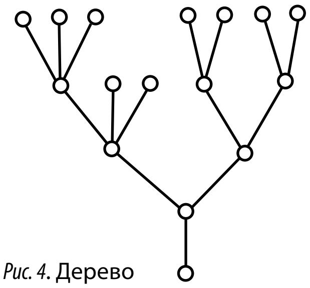

Рис. 4. Дерево

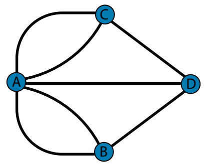

Рис. 5. Мультиграф задачи о кенигсбергских мостах

можно нарисовать стрелочки, показывающие разрешенное направление движения, или же приписать каждому ребру некоторое число (его обычно называют весом). В первом случае мы получим ориентированный граф, или, коротко, орграф. Во втором случае – взвешенный граф. Такие конструкции имеют еще более широкую область применения, чем простые графы.

Например, в виде ориентированного графа с петлями может быть изображено любое бинарное отношение на конечном множестве. Это некоторое подмножество его декартова квадрата V^2, то есть множества упорядоченных пар, составленных из элементов множества V. Но всякую такую пару (a, b) можно понимать как ребро, выходящее из вершины a и входящее в вершину b в орграфе с множеством вершин V.

В зависимости от свойств набора ребер графа выделяются различные его типы. Некоторые из них вполне наглядны, например простая цепь P_n – граф, у которого вершины соединены цепочкой ребер *(рис. 3а)*, простой цикл C_n – цепь, замкнутая в кольцо *(рис. 3б)*. Здесь индекс n в стандартных обозначениях графов P_n и C_n обозначает количество вершин в них, а слово «простой» указывает на отсутствие самопересечений. Если такое слово отсутствует, то цепь или цикл могут самопересекаться, проходя по нескольку раз через одни и те же вершины по разным ребрам. Граф называется связным, если в нем любые две вершины соединены некоторой простой цепью. Очевидно, все цепи и циклы связны; то же относится ко всем полным графам *(рис. 3в)*, в которых каждая вершина соединена со всеми остальными. Стандартное обозначение полного графа на n вершинах – K_n. Связный граф, в котором не содержится ни одного цикла, – это дерево *(рис. 4)*. Несколько деревьев без общих вершин образуют лес. В таком графе, естественно, нет циклов, и он не является связным.

О том, как ходить кругами с пользой для науки

В отличие от перечисленных, многие другие свойства и типы графов (а в теории графов их невообразимое множество) далеко не так очевидны и наглядны. В этом, возможно, заключается один из источников плодотворности теории графов, которая таким образом позволяет сводить воедино наглядность и абстракции.

Например, класс эйлеровых графов определяется тем, что в графе содержится цикл, включающий в себя все его ребра. Иначе говоря, этот граф можно нарисовать, не отрывая пера от бумаги, одним росчерком.

Задача 1, сформулированная в начале статьи, как раз об этом: для ее решения нужно выяснить, является ли граф, соответствующий условию задачи *(рис. 5)*, эйлеровым. В этом графе ребра изображают мосты, а вершины – острова и берега. Так как в нем есть кратные ребра, он на самом деле является мультиграфом.

Город К. в задаче 1 – это Кенигсберг, столица Пруссии. В первой половине XVIII в. в нем действительно было 7 мостов, построенных в XIII–XVI вв. По одной из легенд, задачу о мостах ехидные жители города предлагали всем приезжим, зная, что ее до сих пор никому не удавалось решить. По другой – они сами (включая и Иммануила Канта, которому иногда приписывают изобретение этой задачи) были крайне озабочены своей неспособностью найти решение проблемы.

В 1735 г. к задаче о семи мостах обратился (по неизвестным до сих пор причинам [5]) Леонард Эйлер, о чем он написал в письме к итальянскому математику и инженеру Джиованни Джакобо Маринони от 13 (24) марта 1736 г. [6]:

«Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинуто семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти

их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто еще до сих пор не смог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно.

Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения не достаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство».

Решение, которое нашел Эйлер, было представлено им общему собранию Петербургской академии 26 августа 1735 г. и опубликовано в VIII томе Комментариев Санкт-Петербургской императорской Академии наук [7] за 1736 г. (реально напечатанном лишь в 1741 г.). В современном изложении, сильно отличающемся от оригинального, оно выглядит следующим образом.

Принадлежность графа (или даже мультиграфа) к классу эйлеровых легко распознать. Для этого достаточно определить степени его вершин, то есть число ребер, примыкающих к каждой вершине. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четную степень. Действительно, если в графе есть цикл, содержащий все ребра, то он должен пройти и через все вершины, причем, двигаясь по циклу, придется в каждую вершину войти, а затем из нее и выйти по новому ребру. Но для этого как раз и нужно, чтобы у каждой вершины степень была четной. В нашем случае все вершины имеют нечетную степень, и поэтому требуемого цикла не существует – задача построения эффектного прогулочного маршрута неразрешима.

В 1905 г. на карте старого Кенигсберга появился еще один мост. С его помощью германский кайзер Вильгельм II, если верить еще одной легенде, решил предложенную ему придворными шутниками задачу о семи кенигсбергских мостах, подойдя к ней по-солдатски прямо и по-императорски широко. Заявив, что задачу можно решить и он сделает это за одну минуту, кайзер на поданном листке бумаги начертал: «Приказываю построить восьмой мост». Новый мост, который назвали Императорским, соединил еще одним ребром вершины B и D, сделав их степени четными, а весь граф – полуэйлеровым. В таком графе имеется не более двух вершин нечетной степени, и благодаря этому он содержит эйлерову цепь, которая начинается в одной из этих вершин, проходит по всем его ребрам и заканчивается во второй. Поэтому после 1905 г. в Кенигсберге появилась возможность пройти по всем городским мостам по одному разу, начав свой путь на правом берегу реки (вершина графа C) и завершив его на острове A.

Все упомянутые нами процедуры при решении задачи об эйлеровом цикле не особенно трудоемки. В случае графа с n вершинами и m ребрами, чтобы распознать эйлеровость, нужно найти степени всех его вершин и проверить на четность полученные n целых чисел. Для этого будет достаточно примерно m элементарных операций. Построение эйлерова цикла в графе с четными степенями вершин заметно сложнее, но и оно потребует не более Cm операций, где C – константа, не зависящая от m. Это означает, что время работы программы, решающей задачу об эйлеровом цикле, увеличивается с ростом m пропорционально m. Такое решение по своим вычислительным затратам считается очень эффективным.

Совершенно иначе обстоят дела в очень похожем, на первый взгляд, вопросе о существовании гамильтоновых циклов. Граф называется гамильтоновым, если он содержит простой цикл, проходящий через каждую его вершину. Сам этот цикл также

Разумеется, то, что при выполнении сформулированного условия эйлеров цикл на самом деле существует, тоже нужно доказывать, хотя сам Эйлер этим не озаботился. Для этого достаточно предъявить какой-либо способ построения искомого цикла. Впервые такой способ был предложен в 1871 г. Карлом Хирхольцером. Согласно ему, выйдя из произвольной вершины, нужно двигаться по ребрам графа произвольным образом, заботясь лишь о том, чтобы не идти уже пройденным путем. Поскольку степени всех вершин четны, такое путешествие может оборваться лишь в начальной вершине, в любой другой обязательно найдется ребро для его продолжения. Если нам удалось пройти по всем ребрам – эйлеров цикл построен. Если нет – все ребра, по которым мы уже прошли, удаляются, вместе с ними удаляются и вершины, оставшиеся без примыкающих к ним ребер. А в оставшихся частях графа операция повторяется, начиная с одной из уже посещенных вершин – в каждом оставшемся куске старого графа такая вершина обязательно есть, все степени вершин по-прежнему четны, так как ребра мы удаляли парами «вход–выход». После нескольких повторений такого процесса от графа ничего не останется – все его ребра войдут в несколько циклов. Объединяя их в один, мы и получим то, что хотели.

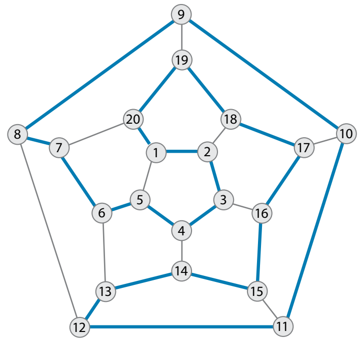

Рис. 6. Решение головоломки Гамильтона: гамильтонов цикл в графе додекаэдра

называется гамильтоновым (как и простая цепь с таким свойством).

Название «гамильтонов цикл» произошло от игры «Икосиан» (в другом, более позднем варианте – «Додекаэдр путешественника»), предложенной лондонскому производителю игрушек Джону Жаку ирландским математиком Вильямом Гамильтоном в 1859 г. В ней нужно было, выйдя из исходной вершины додекаэдра (правильного многогранника с 12 гранями, 20 вершинами и 30 ребрами), обойти по ребрам все его вершины, посетив их только по одному разу, и вернуться в исходную точку. Каждой вершине для занимательности было приписано название крупного города мира: Лондон, Дели, Париж и др. Первые 4 города на маршруте указывал один из игроков, а второй должен был найти продолжение пути, имеющее требуемое свойство. Игра оказалась неинтересной из-за своей простоты и не имела коммерческого успеха. Она плохо продавалась, поэтому до нынешнего дня сохранились лишь ее единичные экземпляры.

Но все так просто лишь в этой детской игре: хороших алгоритмов построения гамильтоновых циклов в графах общего вида не существует.

Несмотря на то что на первый взгляд разница определений гамильтонова и эйлерова цикла незначительна, задача выяснить, содержит ли граф гамильтонов цикл, является трудно решаемой как в общем случае, так и для большинства естественных классов графов. Доказать гамильтоновость заданного графа очень просто, если есть хорошая подсказка. Ею может быть правильно указанный гамильтонов цикл в этом графе. Но вот чтобы доказать негамильтоновость заданного негамильтонова n-вершинного графа, придется перебрать все простые циклы длины n, которые можно построить на его вершинах, и убедиться, что ни один из них не является его гамильтоновым циклом. Иными словами, надо перебрать всех возможных кандидатов на роль гамильтонова цикла в нем и показать, что ни один из них не годится на эту роль. А число этих кандидатов очень велико даже в графах с относительно малым количеством вершин и ребер: их в точности

$(n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\,(n-1)$.

Причем никакая подсказка здесь не поможет – ее просто не существует.

Основным направлением в исследовании проблемы гамильтоновости традиционно выступает поиск условий, обеспечивающих существование в графе гамильтонова цикла. Простейшие из них достаточно очевидны. Например, всякий полный граф гамильтонов. Большинство теорем сводится к утверждениям типа «если в графе много ребер и они «достаточно равномерно» распределены по графу, то он гамильтонов». Самая простая (и исторически первая) из них теорема английского физика Дирака, доказанная им в 1952 г., такова: если в связном графе с n вершинами (при n, равном 3 и более) степени всех вершин больше или равны $n/2$, то граф гамильтонов.

А где же геометрия?

Все, что мы до сих пор говорили о графах, на самом деле было лишь очень слабо связано с геометрией. Несмотря на свое «рисуночное» обличье, графы прекрасно могут без нее обходиться: работать с графами и их свойствами вполне можно, не используя картинок, на которые мы опирались, определяя, что такое граф.

Любой граф может быть задан (и это один из двух основных и наиболее удобных способов его задания) своей матрицей смежности, то есть квадратной таблицей, в которой на пересечении строки с номером i и столбца с номером j записано число ребер, выходящих из вершины с номером i и входящих в вершину с номером j. Предварительно, разумеется, вершины графа придется пронумеровать. Например, для псевдографа на *рис. 2* , мультиграфа на *рис. 5*, полного графа K_4 на *рис. 8*, простой цепи P_4 и простого цикла C_4 такие матрицы будут иметь вид, соответственно:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&2&2&1\\2&0&0&1\\2&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\text{ и }\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

По матрице смежности не всегда можно с первого взгляда понять, как выглядит граф, но коечто можно увидеть: у неориентированного графа матрица обязательно симметрична, у графа без петель на главной диагонали (там, где пересекаются строки и столбцы с одинаковыми номерами) всегда стоят нули, у простого графа – только из нуля и единицы. Эти простые наблюдения вполне тривиальны, и не в них главная выгода от такого рассмотрения графов. Помимо удобства алгоритмического оперирования графами, представленными своими матрицами смежности, очень важно то, что матрицы можно складывать и умножать по правилам матричной алгебры, благодаря чему у них есть свои числовые и нечисловые характеристики и инварианты, дающие возможность изучать такие свойства графов, которые не видны на изображающем их рисунке и вообще никак не представимы на основе геометрических образов.

Например, можно изучать спектральные свойства графов.

Собственным значением квадратной матрицы A называется такое число λ, для которого уравнение Ax=λx, где x – вектор из n компонент, имеет ненулевые решения относительно x. Такие числа легко находятся по простому рецепту из учебника по высшей математике. Все вместе они называются спектром матрицы A. Если A – матрица смежности некоторого графа G, то ее спектр состоит из вещественных чисел, наибольшее из которых положительно. Это число называется спектральным радиусом графа и обозначается ρ(G).

В теории графов с 1986 г. известна следующая проблема Брюалди – Золхайда: каков может быть максимальный спектральный радиус у графа G на n вершинах, принадлежащего заданному классу? Получение все более точных оценок этой величины для различных графов и их классов за последние десятилетия стало предметом неформального международного соревнования для математиков.

Для класса гамильтоновых графов ответ на поставленный вопрос будет спектральным признаком гамильтоновости графа G. Несколько таких признаков, серьезно улучшающих известные ранее оценки, были не так давно получены в Институте математики НАН Беларуси. Самый простой из них состоит в следующем.

Пусть G – простой связный граф на n>8 вершинах без висячих вершин (то есть тех, к которым примыкает только одно ребро), отличный от графов, входящих в некоторое (явным образом описанное) семейство. Тогда если его спектральный радиус удовлетворяет неравенству ρ(G)≥n–3, то граф G – гамильтонов.

Тем не менее в теории графов есть и такие разделы, в которых участие геометрии очень существенно.

Известно, что любой граф можно изобразить в трехмерном пространстве так, чтобы его ребра не пересекались – это теорема. Но на плоскости уложить таким способом произвольный граф не получится. Граф, с которым это можно проделать, называется планарным, а тот, с которым это уже случилось, – плоским. Плоский граф похож на многогранник: у него есть грани. Каждая грань – это ограниченная ребрами и не содержащая внутри себя вершин и ребер часть плоскости. Гранью считается и бесконечная часть плоскости, расположенная вне графа. Для связного плоского графа на n вершинах, у которого m ребер и f граней, справедлива формула Эйлера:

n-f-m=2,

доказанная им в 1752 г. (легче всего ее запомнить в виде В+Г=Р+2).

Необходимость получения ответа на вопрос, является ли заданный граф плоским, естественным образом возникает при реализации любых электрических схем, особенно если речь идет о печатном монтаже или создании микросхем. Ответ дает теорема Понтрягина – Куратовского, доказанная в конце 1920-х гг. Согласно ей, граф планарен, если не содержит в качестве подграфов ни полный граф на 5 вершинах K_5 *(рис. 3в)*, ни полный двудольный граф $K_{3,3}$ *(рис. 7)*, а также графов, получающихся из этих двух, если разбить их ребра, поместив на них дополнительные вершины. По этой причине графы K_5 и $K_{3,3}$ иногда называют запрещенными конфигурациями для плоскости.

Полный двудольный граф $K_{n,m}$ – это такой граф, у которого все вершины разбиты на две группы (доли) из m и n вершин таким образом, что каждая вершина одной доли соединена с каждой вершиной другой доли, а между вершинами, принадлежащими одной доле, ребер нет.

Именно граф $K_{3,3}$ появляется в задаче о трех домах и трех колодцах. Каждая вершина одной его доли – дом, второй – колодец, а тропинки изображаются ребрами. После того, как это понято, решить

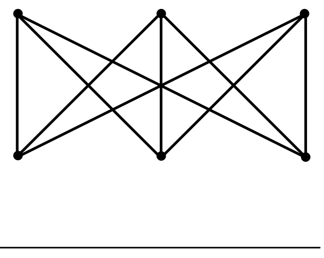

Рис. 7. Граф $K_{3,3}$

Доказать непланарность графов K5 и K3,3 можно и непосредственно, пользуясь формулой Эйлера. Для этого нужно предварительно получить дополнительные соотношения, связывающие число граней и ребер в плоском графе.

В случае полного графа любая грань должна иметь не менее трех ребер (грань с двумя ребрами возможна только в мультиграфе или же у дерева на трех вершинах), поэтому справедливо неравенство 2Р≥3Г. Коэффициент 2 при числе ребер Р появляется потому, что каждое ребро принадлежит ровно двум граням и поэтому в величине 3Г посчитано ровно два раза. Отсюда по формуле Эйлера получаем Р≤3В–6. У графа K5 В=5, Р=10, 3В–6=9. Неравенство 10≤9 ложно, поэтому граф K5 не может быть изображен на плоскости. Заметим, что если в нем удалить одно (любое) ребро, то он без проблем укладывается на плоскость.

В двудольном графе из-за того, что ребер, соединяющих вершины, входящие в одну долю, нет, любая грань должна иметь не менее четырех ребер. Поэтому справедливы неравенства 2Р≥4Г и, по формуле Эйлера, Р≤2В–4. У графа K3,3 В=6, Р=9, 2В–4=8. Неравенство 9≤8 ложно, поэтому граф K3,3 непланарен, но удаление любого ребра тоже делает его планарным.

задачу не составляет труда: теорема Понтрягина – Куратовского гарантирует, что ответ отрицательный.

Формула Эйлера верна только для графов, нарисованных на плоскости или на сфере (сфера легко превращается в плоскость, если проткнуть в ней дыру и растянуть края в бесконечность). Для графов, нарисованных на другой поверхности, соотношение числа вершин, ребер и граней может быть иным. Нетрудно проверить, что графы K_5 и $K_{3,3}$ тороидальны, то есть могут быть уложены на торе (попросту говоря – на поверхности бублика): запрещенные конфигурации на торе другие. Их более 17 000, и, что самое интересное, они до сих пор известны не все. Доказано лишь, что число их конечно.

Все эти свойства графов не зависят от расстояний, углов и других привычных для геометрии величин. Они называются топологическими, а их изучением занимается топологическая теория графов.

Гораздо ближе к обычной геометрии находится геометрическая теория графов. Геометрический граф – это граф, уложенный (изображенный) на плоскости так, что его ребрами являются прямолинейные отрезки, а вершинами – концы этих отрезков. Предполагается, что ни один из этих отрезков не содержит вершину в качестве своей внутренней точки. Такая теория ближе не только к школьной планиметрии, но и к инженерной практике.

В Институте математики в течение ряда лет проводились исследования, в которых основным объектом были геометрические графы. Основное внимание при этом уделялось задаче поиска непересекающихся подграфов различных типов в таких графах, то есть подграфов, у которых любые два ребра либо не пересекаются, либо имеют общую вершину. Задачи, связанные с поиском в геометрических графах непересекающихся подграфов либо подграфов, имеющих минимальное число пересечений ребер, возникают в проектировании СБИС (сверхбольших интегральных схем). Они являются вместе с задачами размещения и разбиения графов и гиперграфов базовыми в этой области приложений. Проводники, соединяющие элементы схемы и расположенные в одном слое чипа, не должны пересекаться, и для решения минимизации числа слоев требуется находить подходящее разбиение графа на непересекающиеся деревья. Кроме того, минимизация числа пересечений ребер геометрического графа тесно связана с минимизацией площади чипа, реализующего заданную схему.

Еще ближе к привычной геометрии лежат задачи комбинаторной вычислительной геометрии. Но о них немного позже.

Продолжение следует.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сарванов В. Исследование дискретных задач: алгоритмы, графы, вычислительная геометрия / В. Сарванов // Наука и инновации. 2018. №10 (188). С. 56–62.
2. Сарванов В. Исследование дискретных задач: алгоритмы, графы, вычислительная геометрия / В. Сарванов // Наука и инновации. 2018. №12 (190). С. 73–77.
3. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников и др. – М., 1990.
4. О.И. Мельников. Теория графов в занимательных задачах: Более 250 задач с подробными решениями. – М., 2012.
5. Brian Hopkins, Robin Wilson. The Truth About Konigsberg // The College Mathematics Journal. 2004. Vol. 35 (3). P. 198–207.
6. Леонард Эйлер. Письма к ученым. – М., 1963.
7. Euler L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis // Commentarii Acad. Sci. Imp. Petrop., 8, 1736. P. 128–140.